سلسلة التمارين رقم : 03

- الاشتقاق و دراسة الدوال العددية -

الأستاذ : أحمد مومني

التمرين رقم 01:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x+2-\sqrt{x^2+2x} & , \quad x<-2 \\ f(x) = A\text{rctan}\sqrt{x+2} & , \quad x \geq -2 \end{cases}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

I – 1 – أثبت أن الدالة f متصلة في النقطة 2-.

2 – أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 2-.

3 – a – أحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}-\{-2\}$

b – ضع جدولا لتغيرات الدالة f

4 – a – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

b – بين أن:

$$(\forall x \in]-\infty,-2]) \quad f(x)-2x-3>0$$

c – أنشئ المنحنى (C_f)

5 – ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,-2[$

a – بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده

b – حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J

II – ليكن h قصور الدالة f على المجال $[0,2]$

و (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = h(U_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1 – a – بين أن: $Arctan\, x \leq x \quad (\forall x \in \mathbb{R}^+)$

b – بين أن $0<U_n \leq 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

c – بين أن المتتالية (U_n) تناقصية قطعا

2 – a – بين أن المعادلة $h(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,2[$

b – بين أن: $h([0,2]) \subset [0,2]$

c – استنتج أن (U_n) متقاربة محددا نهايتها

التمرين رقم : 02

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = (Arc\tan x)^2 - 4Arc\tan x & , \quad x \geq 0 \\ f(x) = -3\left(\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}\right)-1 & , \quad x<0 \end{cases}$$

1 – أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 – a – أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0

b – أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0 و أول النتيجة مبيانيا

3 – a – بين أن:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{2(Arc\tan x-2)}{x^2+1} & , \quad x \geq 0 \\ f'(x) = \dfrac{-\left(3(1-x)^{\frac{2}{3}}+2x-3\right)}{x^2(1-x)^{\frac{2}{3}}} & , \quad x<0 \end{cases}$$

b - حل في المجال $]-\infty,0[$ المتراجحة :

$$3(1-x)^{\frac{2}{3}} \geq 3-2x$$

c – استنتج جدول تغيرات الدالة f

4 – ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[\tan 2,+\infty[$

a – أثبت أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده

b – أحسب $g(\sqrt{3})$ واستنتج $(g^{-1})'\left(\dfrac{\pi(\pi-12)}{9}\right)$

c – حدد $g^{-1}(x) \quad (\forall x \in J)$

5 – ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

a – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

b – أدرس تقعر المنحنى (C_f) على $]-\infty,0[$

c – أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين (C_f) و $(C_{g^{-1}})$

التمرين رقم 03:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{1+\sin x}}$$

1 – a – بين أن:

$$f'(x)=\frac{-\cos x}{2(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}} \qquad \left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{0}\right]\right)$$

b – بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا λ من المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

c – بين أن :

$$|f'(x)|\le\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

2 – نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2}{1+\sin U_n}} \quad , \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

a – تحقق أن $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b – بين أن : $0\le U_n\le\frac{\pi}{2} \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$

c – بين أن:

$|U_{n+1}-\lambda|\le\frac{\sqrt{2}}{2}|U_n-\lambda| \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

التمرين رقم04 : (بكالوريا 1995)

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)$$

و (U_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{U_n^2-3}{U_n^2+3}\right) \quad , \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1 – a – أدرس تغيرات الدالة f

b – استنتج أن: $\frac{-1}{4}\le U_n\le 0 \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$

2 – a – بين أن المتتالية $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية و أن المتتالية $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية

b – بين أن: $|f'(x)|\le\frac{1}{12} \qquad \left(\forall x\in\left[\frac{-1}{4},0\right]\right)$

c – استنتج أن:

$$|U_{2n+3}-U_{2n+2}|\le\left(\frac{1}{12}\right)^2|U_{2n+1}-U_{2n}| \qquad (\forall n\in\mathbb{N})$$

d – بين أن المتتاليتين $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ و $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتين ولهما نفس النهاية

4 – a – بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α لا ينتمي إلى المجال $\left]\frac{-1}{4},0\right[$

b – بين أن المتتالية (U_n) متقاربة و أن نهايتها هي α

التمرين رقم05:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كمايلي:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-x$$

و ليكن (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – a – أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

b – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

2 – a – أدرس اشتقاق الدالة f على يمين النقطة 0 ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا

b – بين أن:

$$f'(x)=-\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(3\sqrt[3]{x}+1\right)}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad (\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$$

c – ضع جدولا لتغيرات الدالة f

3 – a – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,+\infty[$

b – بين أن α يحقق المعادلة $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$ ثم استنتج قيمة العدد α

4 – أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\approx 4{,}2$)

5 – استنتج مما سبق أنه إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث: $0<a<\alpha<b$ فإن:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}>\frac{a}{b}$$

التمرين رقم 06:

لتكن f الدالة العددية لمعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt[3]{x^3+1} & , \quad x > -1 \\ f(x) = 1 + x - 2\sqrt{Arc\tan|x| - \frac{\pi}{4}} & , \quad x \le -1 \end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الجزء الأول:

1 – أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $1-$ و أول النتيجة المحصل عليها هندسيا

2 – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

3 – a – أحسب $f'(x)$ على $\mathbb{R} - \{-1\}$

b – ضع جدولا لتغيرات الدالة f

4 – لتكن g قصور الدالة f على المجال

$$I = \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty \right[$$

بين أن : g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

5 – نضع : $h(x) = f(x) - x$

a – أدرس تغيرات الدالة h على المجال I

b – استنتج أن: $x \le f(x) \quad (\forall x \in I)$

6 – أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كل من (C_f) و $(C_{g^{-1}})$ (نأخذ $\sqrt{\pi} \simeq 1,77$ و $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \simeq 0,7$ و $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \simeq 0,62$)

الجزء الثاني:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

$$\begin{cases} U_0 \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty \right[\\ U_{n+1} = U_n \sqrt[3]{U_n^3 + 1} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1 – نفترض أن $U_0 < 0$

a – بين أن : $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \le U_n < 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

b – بين أن (U_n) متقاربة محددا نهايتها

2 – نفترض أن $0 < U_0$ و نضع: $k = U_1 - U_0$

a – بين أن : $k \le U_{n+1} - U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

b – استنتج أن: $U_0 + nk \le U_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

c – استنتج نهاية المتتالية (U_n)

التمرين رقم 07:

لتكن f الدالة العددية لمعرفة بما يلي:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 – a - حدد (D_f) حيز تعريف الدالة f

b- بين أن النقطة $I(0,-1)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) ثم استنتج مجموعة دراسة الدالة f

2 – أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

3 – a – بين أن لكل x من (D_f) :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

b – ضع جدولا لتغيرات الدالة f

c - حدد الدالة التالفية المماسة للدالة f عند النقطة 0 ثم حدد قيمة مقربة لكل من $f(0,9999)$ و $f(-0,00001)$

4 – لتكن g قصور الدالة f على المجال $K =]-1,1[$

بين أن : g تقابل من K نحو مجال J يجب تحديده

5 – أحسب $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة $\frac{-4}{3}$ ثم أحسب : $\left(g^{-1}\right)'\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-9}{22}$

6 – أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كل من (C_f) و $(C_{g^{-1}})$

(نأخذ $f(\sqrt{3}) \simeq 4,14$ و $f(-\sqrt{3}) \simeq -6,14$)

AHMED MOUMNI